

**Дубінін Є.О.**

**Полянський О.С.,**

**Скорик М.О.**

Харківський національний автомобільно-  
дорожній університет  
м. Харків, Україна  
E-mail: dubinin-rmn@ukr.net

**Задорожня В.В.**

Харківський національний технічний універси-  
тет сільського господарства  
імені Петра Василенка  
м. Харків, Україна

## МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ РАДІУСІВ ІНЕРЦІЇ КОЛІСНИХ МАШИН

УДК 629.017

*Отримані уточнені формули для розрахунків середніх значень радіусів інерції колісної машини щодо трьох координатних осей в процесі руху. Отримані залежності для визначення діапазону найбільш імовірних значень радіусів інерції, границі якого відстоять від середнього значення на величину середнього квадратичного відхилення, при дії нормального усіченого закону розподілу щільності моментів інерції. Результати дослідження можуть бути використані при проектуванні та модернізації колісних машин.*

**Ключові слова:** радіус інерції, момент інерції, діапазон, колісна машина.

**Вступ.** Стійкість положення колісних машин залежить як від їх конструктивних особливостей, так і від особливостей опорної поверхні й керуючих впливів водія. Виробники машин намагаються максимально забезпечити необхідний рівень стійкості. Але в процесі експлуатації виникають додаткові збурювальні фактори, передбачити які на стадії проектування й виробництва досить важко. До таких факторів відносяться зміна положення центра мас і радіусів інерції колісної машини при навішуванні додаткового устаткування, баластуванні і так далі. Ці зміни можуть суттєво впливати на параметри стійкості положення колісної машини.

**Аналіз останніх досягнень та публікацій** Відомо, що оцінка показників стійкості проти заносу й перекидання неможлива без визначення радіусів інерції колісних машин. На їхню стійкість впливають: конструктивні особливості, у тому числі розташування центра мас і радіуси інерції; маса машини; наявність вантажу і його вид; розташування та надійність закріплення вантажу; установка додаткового устаткування і так далі [1–5]. Допускається, що величини моментів інерції залежать від закону розподілу маси машини в межах її колії, бази та габаритної висоти. При значній кількості факторів, що впливають на цей розподіл, припускають, що щільність розподілу моментів інерції підкоряється нормальному закону [6]. У роботах [7–10] побудована недостатньо точна імовірнісна модель визначення радіусів інерції колісної машини, заснована на припущенні нормального розподілу квадратів радіусів інерції за об'ємом машини. У роботі [7] запропонований імовірнісний підхід до визначення радіусів інерції колісних машин щодо колії. При цьому питання, пов'язані з визначенням радіусів інерції щодо колісної бази розглянуті не були. Тому необхідне вдосконалювання імовірнісного методу з метою уточнення характеристик колісних машин у процесі руху.

**Мета і постановка завдання.** Метою роботи є підвищення точності оцінювання радіусів інерції колісної машини щодо трьох координатних осей в процесі руху.

Для досягнення поставленої мети необхідно визначити діапазон найбільш імовірних значень радіусів інерції, границі якого відстоять від середнього значення на величину середнього квадратичного відхилення.

**Оцінювання радіусів інерції колісних машин.** З огляду на те, що щільність розподілу моментів інерції підкоряється нормальному закону, визначимо в цьому випадку параметри розподілу [7]

$$\bar{I}_{ic} = \frac{1}{2} \cdot (I_{ic \max} + I_{ic \min}), \quad (1)$$

$$\sigma_{Ii} = \frac{1}{6} \cdot (I_{ic \max} - I_{ic \min}), \quad (2)$$

де  $\bar{I}_{ic}$  – оцінка середнього значення моменту інерції;

$I_{ic \max}, I_{ic \min}$  – максимально та мінімально можливі значення моменту інерції;

$\sigma_{Ii}$  – середнє квадратичне відхилення значення моменту інерції.

Враховуючи, що

$$I_{ic} = m_M \cdot i_i^2, \quad (3)$$

де  $i_i$  – радіус інерції машини щодо координатної осі, що проходить через її центр мас.

Тоді [7]

$$i_i^2 = \bar{i}_i^2 \pm \sigma_{i^2} = \frac{1}{2} \cdot (i_{i \max}^2 + i_{i \min}^2) \pm \frac{1}{6} \cdot (i_{i \max}^2 - i_{i \min}^2), \quad (4)$$

де  $i_{i \max}, i_{i \min}$  – максимальне та мінімальне значення радіуса інерції відносно  $i$ -ої осі;

$\bar{i}_i^2$  – оцінка середнього значення квадрата радіуса інерції;

$\sigma_{i^2}$  – середнє квадратичне відхилення квадрата радіуса інерції відносно  $i$ -ої осі

$$\sigma_{i^2} = \frac{1}{m_M} \cdot \sigma_{Ii}. \quad (5)$$

Розрахункова схема колісної машини для визначення радіусів її інерції імовірнісним методом представлена на рис. 1. Визначимо радіус інерції  $i_z$  щодо вертикальної осі колісної машини, що проходить через її центр мас (рис. 1, а).

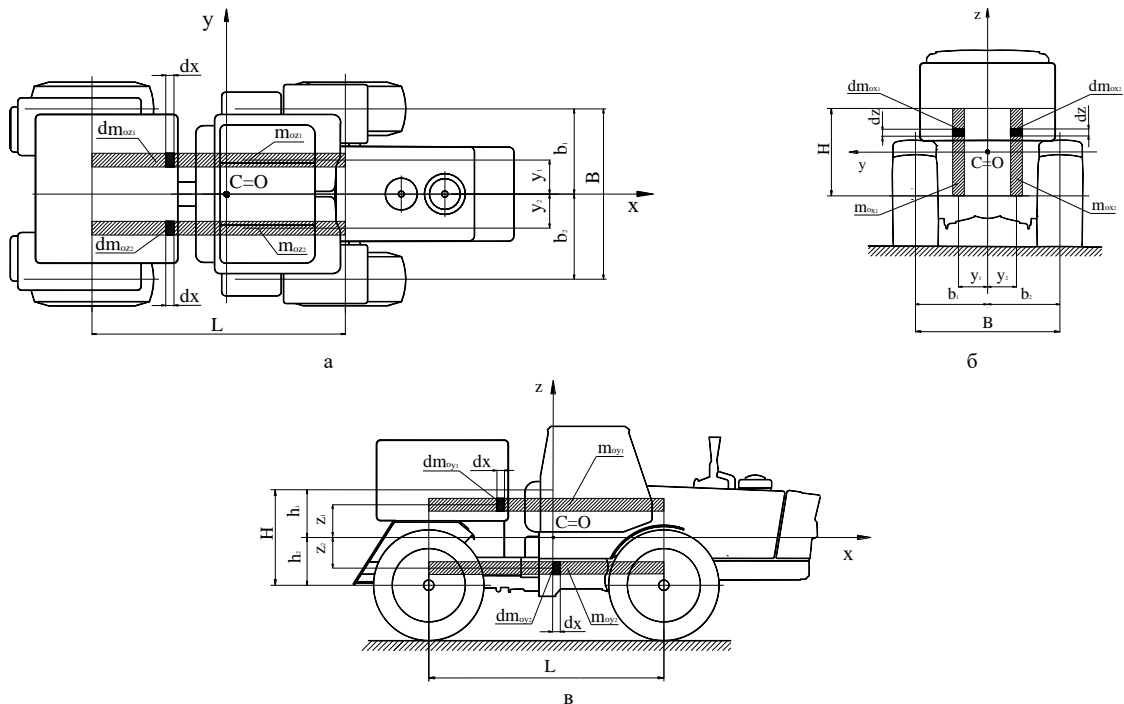


Рис. 1 – Розрахункова схема колісної машини для визначення радіусів її інерції:  
 а – щодо осі OZ; б – щодо осі OX; в – щодо осі OY

Розглянемо умовні маси  $m_{oz1}$  та  $m_{oz2}$ , що представляють собою сукупності точкових мас, які розташовані на лінях, паралельних осі  $OX$ , та перебувають від неї на відстанях  $y_1$  й  $y_2$  відповідно.

У розглянутому випадку величини нескінченно малих мас, за умови їх розташування в межах поздовжньої колісної бази машини  $L$ , дорівнюють

$$dm_{oz1} = \frac{m_{oz1}}{L} \cdot dx, \quad (6)$$

$$dm_{oz2} = \frac{m_{oz2}}{L} \cdot dx. \quad (7)$$

При цьому  $m_{oz1} = \frac{b_1}{B} \cdot m_M$ ,  $m_{oz2} = \frac{b_2}{B} \cdot m_M$ . За умови знаходження центру мас машини на однаковій відстані від осей, її момент інерції щодо осі  $OZ$  буде дорівнювати

$$\begin{aligned} I_{zc} &= I_{zc1} + I_{zc2} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{m_{oz1}}{L} \cdot (y_1^2 + x^2) dx + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{m_{oz2}}{L} \cdot (y_2^2 + x^2) dx = \\ &= m_M \cdot \left( \frac{b_1^3}{B} \cdot \left( \frac{y_1}{b_1} \right)^2 + \frac{b_1 L^2}{12B} + \frac{b_2^3}{B} \cdot \left( \frac{y_2}{b_2} \right)^2 + \frac{b_2 L^2}{12B} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $b_1, b_2$  – відстані від центру мас машини до точок контакту коліс з опорною поверхнею у поперечному напрямку.

Звідки

$$i_{zc} = \sqrt{\frac{b_1^3}{B} \cdot \left( \frac{y_1}{b_1} \right)^2 + \frac{b_1 L^2}{12B} + \frac{b_2^3}{B} \cdot \left( \frac{y_2}{b_2} \right)^2 + \frac{b_2 L^2}{12B}}. \quad (9)$$

У формулі (9) відношення  $\frac{y_1}{b_1}$  і  $\frac{y_2}{b_2}$  є випадковими величинами, які змінюються в межах  $[0;1]$ . Відповідно, у цьому випадку, граничні значення радіуса інерції будуть дорівнювати

$$i_{z \max} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_1 \cdot b_2 + \frac{L^2}{12}}, \quad (10)$$

$$i_{z \min} = \frac{L}{2\sqrt{3}}. \quad (11)$$

Оцінка середнього значення квадрата радіуса інерції складе

$$\bar{i}_z^2 = \frac{1}{2} \cdot \left( b_1^2 + b_2^2 - b_1 \cdot b_2 + \frac{L^2}{6} \right). \quad (12)$$

Середнє квадратичне відхилення квадрата радіуса інерції складе

$$\sigma_{z^2} = \frac{1}{6} \cdot (b_1^2 + b_2^2 - b_1 \cdot b_2). \quad (13)$$

Таким чином, найбільш імовірні значення радіуса інерції машини щодо вертикальної осі  $OZ$  можливо визначити за формулою

$$i_z = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left( b_1^2 + b_2^2 - b_1 \cdot b_2 + \frac{L^2}{6} \right) \pm \frac{1}{6} \cdot (b_1^2 + b_2^2 - b_1 \cdot b_2)}. \quad (14)$$

При симетричному розташуванні центру мас щодо колії ( $b_1 = b_2$ ) найбільш імовірні значення радіуса інерції визначаються за формулою

$$i_z = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot b_1^2 + \frac{L^2}{12} \pm \frac{1}{6} \cdot b_1^2}. \quad (15)$$

Визначення радіусів інерції щодо поздовжньої горизонтальної осі колісної машини (рис. 1б) та щодо поперечної горизонтальної осі колісної машини, що проходять через її центр мас (рис. 1в) відбувається аналогічно.

Таким чином, за допомогою імовірнісного методу отримані залежності для визначення радіусів інерції залежно від параметрів колісних машин. Їхнє застосування ще на етапі проектування дозволить уточнити значення характеристик, що впливають на стійкість положення таких машин. Результати математичного моделювання зведено в таблицю 1.

Таблиця 1

Результати визначення радіусів інерції колісної машини імовірнісним методом

Радіус інерції колісної машини	Діапазон найбільш імовірних значень
Відносно осі $OX$	$i_x = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left( b_1^2 + b_2^2 - b_1 \cdot b_2 + \frac{H^2}{6} \right)} \pm \frac{1}{6} \cdot (b_1^2 + b_2^2 - b_1 \cdot b_2)$
Відносно осі $OY$	$i_y = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left( h_1^2 + h_2^2 - h_1 \cdot h_2 + \frac{L^2}{6} \right)} \pm \frac{1}{6} \cdot (h_1^2 + h_2^2 - h_1 \cdot h_2)$
Відносно осі $OZ$	$i_z = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left( b_1^2 + b_2^2 - b_1 \cdot b_2 + \frac{L^2}{6} \right)} \pm \frac{1}{6} \cdot (b_1^2 + b_2^2 - b_1 \cdot b_2)$

На прикладі шарнірно-зчленованого трактора з номінальним тяговим зусиллям 30 кН ( $i_x = 0,535$  м [11]) визначений діапазон найбільш імовірних значень радіуса інерції щодо осі  $OX$  при наступних характеристиках:  $B = 1,25$  м,  $H = 1,25$  м,  $b_1/b_2 = 1 \dots 1,17$ . Результати розрахунків наведено на рис. 2.

Таким чином, на прикладі шарнірно-зчленованого трактора з номінальним тяговим зусиллям 30 кН визначений діапазон найбільш імовірних значень радіуса інерції щодо його поздовжньої осі, що проходить через центр мас.

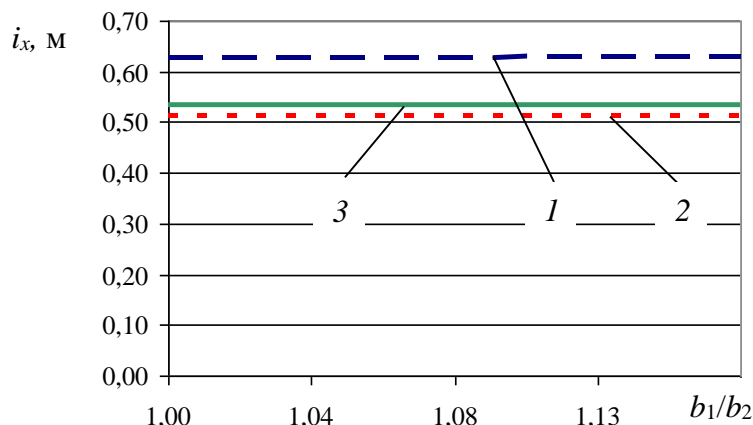


Рис. 2. – Діапазон найбільш імовірних значень радіуса інерції  $i_x$  шарнірно-зчленованого трактора з номінальним тяговим зусиллям 30 Кн  
 1 – максимальне значення; 2 – мінімальне значення; 3 – експериментальне значення

### Висновки:

1. Отримані уточнені формули для розрахунків середніх значень радіусів інерції колісної машини щодо трьох координатних осей в процесі руху. Отримані залежності для визначення діапазону найбільш імовірних значень радіусів інерції, границі якого відстоять від середнього значення на величину середнього квадратичного відхилення, при дії нормального усіченого закону розподілу щільності моментів інерції.

2. Використання нормального усіченого розподілу в межах  $\pm\sigma$  забезпечує вірогідність отриманих результатів близько 70%. На прикладі передньої секції шарнірно-зчленованого трактора з номінальним тяговим зусиллям 30 кН визначений діапазон найбільш імовірних значень радіуса інерції щодо його поздовжньої осі, що проходить через центр мас.

### Література:

1. Закин Я. Х. Прикладная теория движения автопоезда / Закин Я. Х. – М.: Изд-во «Транспорт», 1967. – 252 с.
2. Власов Ю. Л. Влияние расположения груза в кузове грузового автомобиля на устойчивость автомобиля в поворотах / Ю. Л. Власов, Н. А. Морозов, И. А. Бочаров, А. А. Гаврилов // Вестник ОГУ. – 2011. – № 4 (123). – С. 152–156.
3. Эрвин Р. Влияние габаритных размеров и веса большегрузных автомобилей на их устойчивость против крена / Эрвин Р.; пер. с англ. А. А. Забудько. – К.: ТПП УССР, 1983. – 59 с.
4. Рябов И. М. Расчет критической скорости на повороте автомобиля с незакрепленным грузом в кузове / И. М. Рябов, Д. М. Ханин, М. М. Мамакурбанов // Известия Волгоградского Государственного Технического Университета. – 2013. – №10 (113), Т. 6. – С. 30–33.
5. Власов Ю. Л. Динамическая модель равномерного движения автоцистерны без перегородок с частичным заполнением / Ю. Л. Власов, Н. А. Морозов, А. А. Гаврилов // Вестник ОГУ. – 2013. – Вып. №9 (158). – С. 227–231.
6. Раввин А. Г. Расчетный метод прогнозирования устойчивости грузовых автомобилей / А. Г. Раввин, Л. П. Гинцбург, М. А. Носенков, В. М. Торно // Совершенствование технико-экономических показателей автомобилей. – М.: НАМИ. – 1986. – С. 64–68.
7. Подригало М. А. Маневренность и тормозные свойства колесных машин / [М. А. Подригало, В. П. Волков, В. И. Кирчатый, А. А. Бобошко]; под ред. М. А. Подригало. – Х.: изд-во ХНАДУ, 2003. – 403 с.
8. Стабильность эксплуатационных свойств колесных машин / [Подригало М. А., Волков В. П., Карпенко В. А. и др.]; под ред. М. А. Подригало. – Х.: ХНАДУ, 2003. – 614 с.
9. Подригало М. А. Определение радиусов инерции автомобиля на стадии его проектирования / М. А. Подригало, В. П. Волков // Автомобильная промышленность: науч.-техн. журн. – 2003. – №6. – С. 19–22.
10. Подригало М. А. Вероятностный метод определения радиусов инерции автомобиля / М. А. Подригало, В. П. Волков, П. В. Волков, В. М. Ефимчук // Вестник ХНАДУ: сб. науч. тр. – 2002. – Вып. 17. – С. 48–51.
11. Кириенко Н. М. Исследование и разработка средств и методов испытаний защитных устройств тракторов с шарнирно-сочлененной рамой: дисс... канд. техн. наук: 05.05.03 / Кириенко Николай Максимович. – М., 1983. – 189 с.

## Summary

**Dubinin Ie., O. Polianskyi, M. Skorik, V. Zadorozhnyia** Method of wheel machines radius of inertia evaluation

*Refined formulas for calculations of average values of the wheel vehicle radius of inertia relative to three axis coordinates in the course of motion were obtained. Dependences to determine the range of the most probable values of the radius of inertia, the boundaries of which are protected from the mean value by the value of the mean square deviation, under the action of the normal truncated law of the distribution of the density of moments of inertia were obtained. Research results can be used in the design and modernization of wheeled vehicles.*

**Keywords:** radius of inertia, moment of inertia, range, wheel vehicle.

## References

1. Zakin Ja. H. Prikladnaja teorija dvizhenija avtopoezda [Applied theory of the movement of the automobile train] / Zakin Ja. H. – M.: Publ. «Transport», 1967. 252 p.
2. Vlasov Ju. L. Vlijanie raspolozhenija gruzu v kuzove gruzovogo avtomobilja na ustojchivost' avtomobilja v povorotah [The effect of the location of the load in the body of the truck on the stability of the car in turns] / Ju. L. Vlasov, N. A. Morozov, I. A. Bocharov, A. A. Gavrilov // Vestnik OGU, 2011. Vol. 4 (123). pp. 152–156.
3. Jervin R. Vlijanie gabaritnyh razmerov i vesa bol'shegruznyh avtomobilej na ih ustojchivost' protiv krena [Influence of the overall dimensions and weight of heavy-duty vehicles on their resistance to the roll] / Jervin R.; per. s angl. A. A. Zabud'ko. – K.: TPP USSR, 1983. 59 p.
4. Rjabov I. M. Raschet kriticheskoj skorosti na povorote avtomobilja s nezakreplennym gruzom v kuzove [Calculation of the critical speed at the turning of the car with an unscrewed load in the body] / I. M. Rjabov, D. M. Hanin, M. M. Mamakurbanov // Izvestija Volgogradskogo Gosudarstvennogo Tehniceskogo Universiteta, 2013. Vol.10 (113), P. 6, pp. 30–33.
5. Vlasov Ju. L. Dinamicheskaja model' ravnomernogo dvizhenija avtocisterny bez peregorodok s chastichnym zapolnieniem [Dynamic model of the uniform movement of a tanker without partitions with partitions] / Ju. L. Vlasov, N. A. Morozov, A. A. Gavrilov // Vestnik OGU, 2013. Vol. №9 (158). pp. 227–231.
6. Ravvin A. G. Raschetnyj metod prognozirovaniya ustojchivosti gruzovyh avtomobilej [Estimated method for forecasting the stability of trucks] / A. G. Ravvin, L. P. Gincburg, M. A. Nosenkov, V. M. Torno // Sovershenstvovanie tehniko-jekonomicheskikh pokazatelej avtomobilej. – M.: NAMI, 1986. pp. 64–68.
7. Podrigalo M. A. Manevrennost' i tormoznye svojstva kolesnyh mashin [Maneuverability and brake properties of wheeled cars] / [M. A. Podrigalo, V. P. Volkov, V. I. Kirchatyj, A. A. Boboshko]; pod red. M. A. Podrigalo. – Kh.: Publ. HNADU, 2003. – 403 p.
8. Stabil'nost' jekspluacionnyh svojstv kolesnyh mashin [Stability of the operational properties of wheeled vehicles] / [Podrigalo M. A., Volkov V. P., Karpenko V. A. i dr.]; pod red. M. A. Podrigalo. – Kh.: HNADU, 2003. 614 p.
9. Podrigalo M. A. Opredelenie radiusov inercii avtomobilja na stadii ego proektirovaniya [Determination of the radii of inertia of the car at the stage of its design] / M. A. Podrigalo, V. P. Volkov // Avtomobil'naja promyshlennost': nauch.-tehn. zhurn. – 2003. – №6. – S. 19–22.

10. Podrigalo M. A. Verojatnostnyj metod opredelenija radiusov inercii avtomobilja [Probabilistic method for determining the radii of inertia of the car] / M. A. Podrigalo, V. P. Volkov, P. V. Volkov, V. M. Efimchuk // Vestnik HNADU: sb. nauch. tr, 2002, Vol. 17, pp. 48–51.
11. Kirienco N. M. Issledovanie i razrabotka sredstv i metodov ispytanij zashhitnyh ustrojstv traktorov s sharnirno-sochlenennoj ramoj [Research and development of means and methods of tests of protective devices of tractors with a hinged-articulated frame]: diss... kand. tehn. nauk: 05.05.03 / Kirienco Nikolaj Maksimovich. – M., 1983. 189 p.